



sul libro: capitolo 4.1

INTRODUZIONE

❑ **Prerequisiti :**

Avere una terminologia comune per ciò che riguarda alcuni elementi-base del cilindro (generatrici, punti alla stessa quota, sezione con un piano perpendicolare all'asse, ecc.).

Avere già svolto la scheda sulla sfera, e quindi aver lavorato sul concetto di *geodetica*. Tuttavia questo prerequisito può non essere indispensabile e il cilindro costituire il primo incontro con una superficie curva; basterà dedicare maggiore cura alla costruzione del concetto di "andare dritto".

❑ **Obiettivi**

Approfondire il concetto di 'andare dritti' con esperienze che riguardano la superficie cilindrica.

Comprendere il significato di *visione intrinseca* al cilindro e di *visione estrinseca*.

Esplorare le proprietà metriche della geodetica.

❑ **Tempi : 1 ora**

❑ **Materiali / strumenti:**

Cilindri di varie dimensioni; cordini o fili di lana colorati, strisce di carta, elastici, puntine da disegno, automobilina senza sterzo; fogli trasparenti; pennarelli da lucido, nastro adesivo, forbici.

La scheda serve anche come supporto per gli appunti utili per lo studio.

❑ **Modalità di lavoro degli studenti:**

Lavoro di gruppo / discussione guidata dall'insegnante.

❑ **Modalità di lavoro dei docenti:**

Gli insegnanti devono gestire in un'ora di lezione due momenti diversi, un fase di lavoro di gruppo nella quale devono "incoraggiare" gli studenti nella concettualizzazione seguendo la scheda, senza suggerire le risposte e una fase di discussione guidata nella quale favoriscono i confronti fra le diverse risposte e guidano alla sistemazione teorica dei concetti emersi.

COMMENTI E INDICAZIONI

Se osserviamo attentamente il mondo intorno a noi potremo notare quanto numerose siano le superfici cilindriche che ci circondano. Tali superfici sono spesso solcate da linee 'diritte': la scala elicoidale che conduce al piano superiore di un edificio, il nastro trasportatore di una fabbrica di bottiglie

Ci accingiamo quindi a far esplorare dagli allievi questo tipo di superficie che è caratterizzata, come il piano, da curvatura nulla. A differenza del piano, tuttavia, le linee 'diritte' sul cilindro non soddisfano alcuni postulati della geometria euclidea: cade addirittura il postulato che richiede che per due punti passi una e una sola linea dritta.

Questa prima scheda dovrebbe servire a mettere a fuoco gli oggetti di base della geometria del cilindro, ovvero i punti, i 'segmenti', le 'rette', gli angoli.

Questi oggetti dovrebbero essere esplorati operando con le mani sui vari modelli, in modo da comprendere quali analogie/differenze essi presentino rispetto agli analoghi enti degli altri mondi (piano, sfera, cono, pseudosfera). Si può procedere pure a una prima misurazione di distanze e di angoli effettuata con righelli e goniometri flessibili.

Nell'individuare le geodetiche si può notare che, a seconda di come si scelgono i punti, il test dell'elastico che aveva dato buoni risultati sulla sfera non sempre funziona. Può succedere infatti che per ragioni di attrito l'elastico raggiunga l'equilibrio anche su una linea non geodetica.

Diventa più rilevante il test della strisciolina, che deve aderire perfettamente lungo la sua linea mediana alla superficie.

Uno degli obiettivi della scheda è di alternare una visione intrinseca della superficie a una visione estrinseca: in sostanza si chiede agli studenti di immaginarsi come insetti che camminano sul cilindro; poi i modelli di cilindro vengono maneggiati, ruotati, inseriti nell'abituale rappresentazione in 3D. Rispetto alla sfera, può essere meno immediato vedere le cose in modo intrinseco, ma immaginare di camminare sulla superficie di un cilindro è uno sforzo utile in generale per accrescere la capacità di percezione dello spazio.

Una certa tendenza a privilegiare una visione estrinseca può dare luogo negli studenti a voler ricondurre le linee sul cilindro a sezioni piane: le eliche possono essere viste come sezioni piane del cilindro? Le eliche sono tratti di ellisse? C'è il desiderio – e la difficoltà – di rappresentarsi lo spazio 3D. Già con la sfera qualcuno si chiedeva: 'ma la sezione di una sfera con un piano è sempre un cerchio?'

Sorgono problemi diversi rispetto al lavoro sulla sfera; occorre individuare quali siano rilevanti e vadano affrontati e quali invece debbano essere tralasciati.

In sostanza la sfera (che è il nostro mondo!) conduce nel modo più naturale alla geometria non euclidea; del cilindro ci sono alcune attività che fanno riflettere sul significato di via dritta, di quante vie diritte per due punti, poi il tutto prende un'altra piega. Diventano rilevanti:

- i problemi della corrispondenza con i ricoprimenti (vedere scheda 2), che rimandano alla *rappresentazione* piana di ciò che sta su una superficie cilindrica;
- il *verso* con cui si percorre un tratto 'dritto' (vedere scheda 3).

Ma quante geodetiche si riescono a tracciare per due punti di una superficie cilindrica? Certamente infinite, con pendenze diverse. Quale scegliere? Uno studente chiede: ma perché unire due punti con una geodetica più lunga, quando c'è la possibilità di tracciare il percorso più breve? La risposta viene da un altro studente che ha riflettuto sulle scale che scendono al Pozzo di S. Patrizio di Orvieto: 'Va bene che il percorso sia breve, ma se la pendenza è troppo elevata ci si rompe l'osso del collo!'

Se la terra fosse cilindrica ...

1. 'Andare dritti' su una superficie cilindrica

Segnate due punti *A* e *B* sulla superficie del vostro cilindro esaminando varie posizioni; i due punti sono

- alla stessa quota
- sulla stessa generatrice
- nello stesso semicilindro
- su due generatrici diametralmente opposte
- in posizione qualsiasi.

Come si fa ad 'andare dritti' da *A* a *B* in ciascuno dei casi sopra indicati?

Spiegate quale procedimento mettete in atto, con il materiale che avete a disposizione, per individuare il percorso 'diritto' .

.....
.....
.....
.....

Come per la sfera, è richiesto inizialmente di ragionare in modo intrinseco. Così, se si usa l'automobilina senza sterzo, bisogna controllare che le ruote siano sempre aderenti alla superficie, in modo che l'automobilina non sbandi rispetto a una direzione costante.

Usando la striscia di carta, la direzione costante corrisponde alla perfetta aderenza della striscia alla superficie.

Immaginando di essere un millepiedi che stia sulla superficie cilindrica, si dovrebbero muovere alternativamente le due file di zampe in modo simmetrico rispetto all'asse longitudinale del corpo.

Che percorso si segue andando dritto tra *A* e *B*?

I percorsi 'dritti' che uniscono il punto *A* e il punto *B* nelle varie situazioni, seguono linee a voi già note? Se sì, quali?

.....
E' utile che si procurino immagini di fusti volubili, o che si invitino gli studenti a cercarle.

*I percorsi fra *A* e *B* seguono percorsi di vario tipo: Segmenti se i due punti stanno sulla stessa generatrice. Archi di circonferenza se i due punti si trovano alla stessa quota. Se i due punti sono generici, linee che si avvolgono: salgono e ruotano contemporaneamente, come fanno i fusti dei convolvoli. Si evidenzierà che essi non coincidono con nessuna delle coniche, ossia che non possono essere una curva di sezione piana del cilindro, che quindi si tratta di curve sghembe.*

Si cercherà di denominarle, si approfondirà la terminologia per giungere a concordare su "elica".

Si può estendere la definizione di *geodetica* vista sulla sfera anche a percorsi su una superficie cilindrica?

.....

Se gli studenti hanno alle spalle il lavoro sulla sfera devono quindi trasferire nel nuovo contesto cilindrico le azioni, le osservazioni e i problemi che sono scaturiti dall'esperienza precedente. Se il cilindro è la prima superficie curva studiata, una prima guida è data dai percorsi particolari: segmenti e circonferenze. Il criterio della aderenza della strisciolina di carta, l'uso di automobiline senza sterzo gradualmente persuadono mettendo in evidenza le analogie tra sfera e cilindro.

2. La geodetica sul cilindro

C'è un'unica geodetica che unisce due punti di una superficie cilindrica? Giustificate la risposta.

Se restiamo all'interno del primo giro intorno al cilindro ci sono due geodetiche che uniscono due punti: una in senso orario, l'altra in senso antiorario. Si sceglie l'una o l'altra a seconda dell'ordine con cui si considerano i due punti.

A meno che i due punti si trovino su generatrici diametralmente opposte, la lunghezza delle due geodetiche è diversa.

Quando i due punti coincidono abbiamo o il percorso nullo o una circonferenza.

Se invece accettiamo di fare più giri intorno al cilindro abbiamo infinite geodetiche che uniscono due punti; la loro pendenza diminuisce al crescere del numero di giri completi.

La situazione della superficie cilindrica è quindi profondamente diversa rispetto a quella della sfera: tra due punti esistono infiniti percorsi a direzione costante; tra questi, uno solo è il più corto.

Come misurare lungo la geodetica?

Ci si aspetta l'uso del 'righello flessibile' (tipo nastro graduato da sarto).

Le geodetiche sulla sfera erano linee chiuse; sul cilindro, continuando a muoversi su una geodetica, dove si va? Ricordate i vari tipi di geodetiche che potete trovare sul cilindro.

Se si sceglie una direzione ortogonale a una generatrice si descrive un arco di circonferenza, che proseguendo si chiude su se stessa, unico caso di geodetica chiusa. Ogni altra direzione di movimento dà luogo a linee aperte, indefinitamente prolungabili in entrambi i sensi, se ci si riferisce al cilindro teorico indefinito: la proprietà vale sia per le eliche che per le generatrici, che sono rette euclidee.

CHE COSA SO ORA
PAROLE CHIAVE
<i>Generatrice</i>

Elica

Curva sghemba

Versi di avvolgimento

Moto traslatorio

Moto rotatorio

Moto elicoidale